Barem de corectare OLM 2019 Clasa a XII-a

P1

a) $I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; substituția $\sqrt{e^x-1}=t$; $x=\ln\left(t^2+1\right)$; $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$; $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\ln 2\Rightarrow t=1$	2p
$I=\int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}dx=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-\operatorname{arctg} t\right)\Big\|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$	2p
b) $I=\int_0^{\pi}\arccos\left(\sin x\right)dx=\int_0^{\pi}\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$; substituția $\frac{\pi}{2}-x=t$; $dx=-dt$; $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; $x=\pi\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$	2p
$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arccos\left(\cos t\right)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arccos\left(\cos t\right)dt=t^2\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$	1p

P2

a) Pentru $x,y\in M$ se obține $x\circ y=\left(x-a\right)\left(y-a\right)+a\geq a$, deci $x\circ y\in M$, $\forall x,y\in M$.	1p
Verificarea asociativității şi comutativității operaţiei.	2p
Se arată că $e=a+1$ este element neutru; concluzia.	1p
b) Dacă $x,x'\in M$, atunci $x\circ x'=e\Leftrightarrow\left(x-a\right)\left(x'-a\right)=1$	1p
$x=a$ nu este inversabil.	1p
Dacă $x\in M\setminus\{a\}$, se obţine că $x'=a+\frac{1}{x-a}\in M$ şi x' este inversul lui x; grupul elementelor inversabile ale lui M este $\left((a,+\infty),\circ\right)$.	1p

P3

Dacă $H\subset K$ sau $K\subset H$, concluzia este evidentă.	1p
Presupunem că $H\not\subset K$ şi $K\not\subset H$; atunci există $x,y\in G$, astfel încât $x\in H\setminus K$ şi $y\in K\setminus H$.	1p
Dacă $xy=z\in H$, atunci $y=x^{-1}z\in H$, contradicţie; deci $xy\notin H$	2p
Dacă $xy=z\in K$, atunci $y=x^{-1}z\in K$, contradicţie; deci $xy\notin K$	2p
Prin urmare $xy\in G$, dar $xy\notin H\cup K$, deci $G\neq H\cup K$	1p

P4– autor Traian Tămâian (GM 9/2018)

$\int_0^1\sqrt[n]{1+\left(xy\right)^n}dy\geq\int_0^1\sqrt[n]{\left(xy\right)^n}dy=\int_0^1 xy\,dy=\frac{x}{2},\forall x>0$	2p
$\int_0^1\sqrt[n]{1+\left(xy\right)^n}dy\leq\int_0^1\sqrt[n]{\left(1+xy\right)^n}dy=\int_0^1\left(1+xy\right)dy=1+\frac{x}{2},\forall x>0$	2p
$\frac{1}{2}\leq\frac{\int_0^1\sqrt[n]{1+\left(xy\right)^n}dy}{x}\leq\frac{1+\frac{x}{2}}{x},\ \forall x>0$	2p
Din teorema cleştelui rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^1\sqrt[n]{1+\left(xy\right)^n}dy}{x}=\frac{1}{2}$.	1p